Sobre la Estabilización de Sistemas Retardados con un polo inestable y un par de Polos Complejos Conjugados

Miguel Ángel Hernández Pérez y Basilio del Muro Cuellar
Sección de Estudio de Posgrado e Investigación-IPN ESIME Culhuacan
Santa Ana 1000, México DF, 04430
mahp_hernandez@hotmail.com y bdelmuro@ipn.mx
Teléfono: (52) 56-562058

***Resumen*—En este trabajo se aborda la estabilización de sistemas lineales con retardo de tercer orden, con un polo inestable y dos más estables, los cuales pueden ser complejos conjugados. Se dan las condiciones necesarias y suficientes para la estabilización del sistema por retroalimentación estática de la salida**

Palabras clave: Sistemas Lineales, retardo, polos complejos conjugados, predictor, estabilización.

I. INTRODUCCIÓN

Una de las mayores dificultades en el diseño de un sistema de control es sin duda la presencia de retardos, máxime si el sistema que se pretende controlar es inestable en lazo abierto y/o de fase no mínima.

Los retardos temporales pueden ser intrínsecos a los procesos a controlar, véase por ejemplo los procesos químicos, biológicos, columnas de destilación, procesos con intercambios térmicos, etc., o bien introducirse en el sistema de control por el propio diseño del mismo (tiempo de cómputo del algoritmo de control, sistemas distribuidos, control remoto, redes de comunicaciones, retardos introducidos por los sensores y/o actuadores, etc.).

En general, los sistemas de control son sensibles a los retardos, más incluso que a otros parámetros del modelo. De hecho, un sistema de control en lazo cerrado puede llegar a inestabilizarse como consecuencia de los mismos. La principal limitación de los sistemas con retardos en el lazo de control se deriva del decremento de fase, lo cual conduce a una inestabilidad del lazo de control implicando una limitación en la magnitud de la acción de control. (Pierre, 2003).

Los sistemas con retardos temporales son de dimensión infinita, y su función de transferencia en lazo cerrado posee un número infinito de polos. Es por tanto muy difícil para un regulador convencional realizar un ajuste de estos polos. Mayores problemas aparecen cuando tratamos con sistemas inestables con retardos, donde la normal dificultad de los retardos se ve agravada por la presencia de la inestabilidad en el sistema

Por lo tanto se han desarrollado diversas estrategias de control para tratar a los sistemas con retardos. El enfoque más simple consiste en ignorar el término de retardo, diseñar un controlador para el proceso libre del retardo y aplicar el control diseñado al proceso retardado. Es claro que este método solo funciona en el caso de procesos que cuentan con un retardo suficientemente pequeño. Un segundo enfoque consiste en la aproximación del operador del retardo $e^{-\tau s}$ a través de una expansión de series de Taylor o mediante la aproximación de Padé. De esta manera, el sistema puede ser visto como un sistema de fase no mínima con una función de transferencia racional en la variable compleja "s" (Munz, Ebenbauer y Haag, 2009).

Otra estrategia para controlar sistemas con retardo es utilizar un controlador Proporcional-Integral (PI) y Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Por ejemplo en (Nesimioglu y Soylemez, 2010), se analiza un sistema de primer orden inestable con retardo mediante un control PID, donde realizan un análisis de estabilidad basado en (Walton y Marshall, 1987), calculando todos los valores de ganancias para estabilizar esta clase de sistemas. También en (Silva y Bhattacharyya, 2005) se propone un conjunto de controladores PID para sistemas con retardo y se dan a conocer las condiciones necesarias y suficientes de las ganancias $(k, k_i \, y \, k_d)$ para la estabilización de sistemas de primer orden con retardo.

El efecto del retardo puede ser compensado mediante la eliminación del término exponencial de la ecuación característica. Esta técnica consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo por medio de estrategias que intentan predecir los efectos de la entrada actual para una salida futura. Esta técnica fue propuesta por Smith (Smith, 1957) y su compensador de retardo fue llamado Predictor de Smith (PS).

No obstante el PS cuenta con algunas deficiencias tales como: a) es sensible a un mal modelado del sistema, b) No es aplicable para la integración de los procesos, y c) el esquema de predicción no tiene una etapa de estabilización, lo cual restringe su aplicación de lazo abierto a sistemas estables. Algunas modificaciones de la estructura original de PS se han propuesto en (Seshagiri, Rao y Chidambaram, 2007), (Kawnish y Shoukat, 2012), para hacer frente a estos inconvenientes, por ejemplo, en (Rao y Chidambaram, 2006) han presentado una modificación eficiente para el predictor Smith con el fin de controlar un sistema inestable de primer orden con retardo de tiempo, utilizando el método de síntesis directa. De esta manera, un compensador de retardo es diseñado para controlar en lazo abierto un sistema de segundo orden inestable con retardo. En una perspectiva diferente, Normey-Rico (Normey-Rico y Camacho, 2008) y (Normey-Rico y Camacho , 2009) propone una

$Proyecto\ apoyado\ por\ IPN, México, proyecto\ 20121596^{*}$

modificación a la estructura original del PS con el fin de hacer frente a inestabilidad de los sistemas de primer orden con tiempo de retardo.

Por otro lado, algunos trabajos recientes se han dedicado al análisis de la estabilidad y estabilización de sistemas con retardo con base en enfoques de Lyapunov-Krasovskii y Lyapunov Razumijin. Estos resultados se expresan en términos de ecuaciones algebraicas de Riccati, (Kolmanovskii y Richard, 1999), (Qing-Chang, 2006), etc, o desigualdades lineales matriciales, (Fridman, Shaked, 2002), (Lee, Moon, Kwon y Park, 2004), (Mahmoud y Al-Rayyah, 2009), etc. Por ejemplo, en (Michiels, Engelborghs y Vansevenant, 2002)**,** el control de sistemas con retardo se aborda mediante un método numérico a fin de cambiar los valores propios inestables para el semiplano izquierdo, mediante una realimentación estática de los estados, aplicando pequeños cambios en la ganancia de realimentación, el mismo enfoque se lleva a cabo teniendo en cuenta una estrategia basado en un esquema observador. Sin embargo, no se proporcionan las condiciones de estabilidad con respecto al tiempo de retardo.

Hay diferentes estrategias de control para hacer frente a los sistemas de retardo de tiempo, aunque es imposible eliminar el efecto del tiempo muerto completamente, el efecto es minimizado por los compensadores. Todos los compensadores necesitan alguna información previa sobre el proceso o sistema. La diferencia reside tanto en el rendimiento, así como en la robustez del compensador.

En (Del Muro, González y Pedraza, 2009) y (See, Qing-Guo y Cheng, 2010) se reportan condiciones de estabilidad para sistemas lineales con un polo inestable, n polos reales estables y tiempo de retardo τ, mediante retroalimentación estática de la salida. En (See, Qing-Guo y Cheng, 2010), adicionalmente se resuelve el problema mediante controladores PI-PID. En el presente trabajo se da un paso en este tema al abordar el problema particular de los sistemas con posibles polos complejos conjugados y tiempo de retardo. En particular se aborda el problema de la estabilización de los sistemas lineales con un polo inestable, un par de polos (que pueden ser) complejos conjugados y tiempos de retardo en el canal de entrada-salida.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta la formulación del problema. En la Sección 3 se presentan algunos resultados preliminares que han sido utilizados en la obtención del resultado principal este trabajo En la Sección 4 se presenta la estrategia de control propuesta, estableciendo las condiciones *necesarias y suficientes* para la existencia de la estructura de control presentada. La Sección 5 esta dedicada a presentar un ejemplo didáctico, algunas simulaciones numéricas con la finalidad de ilustrar el comportamiento del sistema en lazo cerrado así como el desempeño de la estrategia de control. Finalmente en la Sección 6 se presentan algunas conclusiones.

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con una entrada - una salida con tiempo de retardo dados por la siguiente función de transferencia,

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s}=G(s)e^{-\tau s}. \qquad (1)$$

Donde

- $U(s)$ es la señal de entrada,
- $Y(s)$ es la señal de salida,
- $\tau \geq 0$ es el tiempo de retardo,
- $N(s)\ y\ D(s)$ son polinomios en la variable compleja "s",
- $G(s)$ es la función de transferencia libre de retardo.

Aplicando un control por retroalimentación de la salida de la siguiente forma

$$U(s)=[R(s)-Y(s)]Q(s), \qquad (2)$$

se produce un sistema en lazo cerrado dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Q(s)G(s)e^{-\tau s}}{1+Q(s)G(s)e^{-\tau s}}. \qquad (3)$$

Note que para sistemas con retardo, el término exponencial $e^{-\tau s}$ ubicado en el denominador de la función de transferencia *ec. (3)*, conduce a un sistema con un número infinito de polos y en donde las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado deben de ser indicadas cuidadosamente.

Este trabajo propone un esquema de control con la finalidad de estabilizar la siguiente clase de sistemas de tercer orden con un par de polos, posiblemente complejos conjugados, un polo inestable y tiempo de retardo, que se caracteriza por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\alpha}{(s-a)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)}e^{-\tau s}. \qquad (4)$$

Donde ζ es el factor de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del subsistema de segundo orden. Note que cuando $0<\zeta<1$ estaremos tratando con un sistema que contiene un para de polos complejos conjugados.

En este trabajo se dan condiciones necesarias y suficientes para la estabilización de sistemas dados por *ec (4)* por medio de una retroalimentación estática de la salida.

III. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunos resultados preliminares que han sido útiles para obtener el resultado principal de este trabajo. Considerando el siguiente sistema inestable de primer orden con retardo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s-a)} e^{-\tau s}, \tag{5}$$

con $a > 0$, considere una retroalimentación de la salida

$$U(s) = R(s) - kY(s). \tag{6}$$

Si el retardo de tiempo τ es relativamente pequeño con respecto a la posición del polo inestable, entonces, existe una ganancia k tal que el sistema en lazo cerrado *ecs. (5) - (6)* es estable, esto es,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{s - a + k\alpha e^{-\tau s}}. \tag{7}$$

El enunciado anterior puede formalizarse de la manera siguiente.

Lema 1. Considerando el sistema con retardo *ec. (5)* y la retroalimentación de la salida *ec. (6)*. Entonces existe una ganancia proporcional k tal que el sistema en lazo cerrado *ec. (7)*, es estable si y solo si

$$\tau < \frac{1}{a}.$$

La estabilidad del sistema con retardo mostrado en *ec. (7)* ha sido ampliamente estudiado en la literatura, por ejemplo ver (Niculescu, 2001), (Velasco, del Muro y Marquez, 2008), (Silva y Bhattacharyya, 2005), también la prueba del Lema 1 puede ser obtenida considerando un análisis en el dominio de la frecuencia. Para demostrar este resultado, una alternativa simple basada en un estudio realizado en tiempo discreto es presentada en (Márquez, Del Muro y Velasco, 2010).

IV. Resultados Principales

El siguiente resultado describe las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una ganancia k que garantiza la estabilidad en lazo cerrado del sistema.

Teorema. Considere el sistema retardado dado por *ec. (4)*, y una retroalimentación de la salida *ec. (6)*. Existe una ganancia k tal que el sistema en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s-a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2) + k\alpha e^{-\tau s}}, \tag{8}$$

es estable si y solo si

$$\tau < \frac{1}{a} - \frac{2\zeta}{\omega_n}.$$

Demostración: Este resultado puede ser demostrado por medio de un análisis en el dominio de la frecuencia. Consideremos el sistema *ec. (4)* con la ley de control *ec. (6)*. El Criterio de Estabilidad de Nyquist establece que al cerrar el lazo con una ganancia k*;* el sistema será estable si $N + P = 0$, siendo P el número de polos en el semiplano derecho de la variable compleja "s" y N el número de rodeos al punto -1 en sentido horario (N negativa en el otro sentido) en el diagrama de Nyquist. En este caso, como $P = 1$, existe una ganancia k que estabiliza al sistema si $N = -1$, i.e., si existe un rodeo antihorario al punto -1.

Como primer paso se analiza un sistema de primero orden como el de la *ec. (5)* y considerando el Lema 1, con una ley de control *ec. (6)* existe una ganancia k tal que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si $\tau < 1/a$.

Considerando un análisis en frecuencia, la función de transferencia $G(j\omega)$ esta dada por la magnitud $|G(j\omega)|$ y al ángulo $\angle G(j\omega)$.

Donde $\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{ImG(j\omega)}{ReG(j\omega)}\right]$

La condición de ángulo en el dominio de la frecuencia ω para la *ec. (5)* esta dada por

$$\angle G(j\omega) = -\left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right) - \omega\tau$$

Puede demostrarse que la condición $\tau < 1/a$ es equivalente a pedir que el diagrama de Nyquist parta con un angulo con un valor superior a $-180°$ (para frecuencias cercanas a cero), es decir, $\angle G(j\omega) > -180°$.

Si consideramos ahora el sistema que nos ocupa dado por *ec. (4)*, la condición de ángulo en el dominio de la frecuencia ω esta dada por

$$\angle G(j\omega) = -\left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\right) - \omega\tau - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2 - {\omega_n}^2}\right)$$

Sea $\beta = tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\,\omega}{\omega^2 - {\omega_n}^2}\right)$. Es claro que si se cumple la condición $\tau < 1/a$ ya que si β es lo suficientemente pequeño entonces existe una ganancia k que estabiliza al sistema, dado que la condición de Nyquist sigue siendo la misma, (un rodeo antihorario al punto -1). Al ir creciendo el valor del parámetro β, el lazo que forma el rodeo antihorario al punto -1 va disminuyendo hasta extinguirse (el diagrama de Nyquist parte entonces con angulo menor a -180°) como se puede ilustrar en la Figura 1.

Además considerando que para frecuencias pequeñas $\tan^{-1}(\omega) \approx \omega$, y tomando en cuenta que $\angle G(j\omega) > -180°$, es decir,

$$-180^\circ + \left(\frac{\omega}{a}\right) - \omega\tau - \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega^2 - {\omega_n}^2} > -180°,$$

no es difícil concluir que despejando τ, la condición de estabilidad para el sistema *ec. (4)* es simplemente

$$\tau < \frac{1}{a} - \frac{2\zeta}{\omega_n}.$$

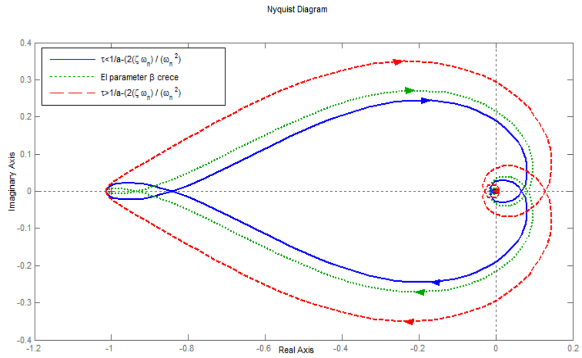

Figura 1. Diagrama de Nyquist cuando $\boldsymbol{\beta}$ crece

Nota: Otra forma de presentar el resultado es ver el subsistema de segundo orden como un sistema con polos complejos conjugados, esto es,

$$\frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} = \frac{1}{(s + b + jb_i)(s + b - jb_i)},$$

donde b es la parte real y b_i la parte imaginaria de los polos complejos conjugados, por lo tanto considerando el siguiente sistema con retardo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{(s - a)(s + b + jb_i)(s + b - jb_i)} e^{-\tau s},$$

y una retroalimentación estática de la salida, tal que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\alpha e^{-\tau s}}{(s - a)(s + b + jb_i)(s + b - jb_i) + k\alpha e^{-\tau s}}.$$

Entonces existe una ganancia k tal que el sistema en lazo cerrado es estable si y solo si

$$\tau < \frac{1}{a} - \frac{2b}{b^2 + b_i{}^2}$$

Note que ambas representaciones se relacionan mediante las expresiones; $\zeta\omega_n = b$ y $\omega_n{}^2 = b^2 + b_i{}^2$.

V. Ejemplo

En particular, los procesos inestables con retardo de tiempo se encuentran con frecuencia en procesos químicos e industriales, como tanques de almacenamiento de líquidos o reactores continuamente agitados (CSTR), (Bequette, 2003).

El siguiente ejemplo ilustra el desempeño de la estrategia de control propuesta en este trabajo.

Considere el siguiente sistema LTI con un polo inestable, un par de polos complejos conjugados y tiempo de retardo caracterizado por la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 1)(s + 4 + j2)(s + 4 - j2)} e^{-.54s}, \qquad (9)$$

donde los parámetros del sistema son $a = 1$, $\tau = 0.54$, $\zeta = 0.89$ y $\omega_n = 4.47$.

Por lo tanto se puede establecer la condición de estabilidad dada por el Teorema presentado en este trabajo tal que $0.54 < 1 - \frac{2(0.89)}{4.47} = 0.6$.

Por lo tanto existe una retroalimentación de la salida con una ganancia k tal que se puede estabilizar el sistema en lazo cerrado.

Se encuentra una ganancia k que cumpla con el criterio de Nyquist, recurriendo a un análisis en el dominio de la frecuencia. La ganancia sugerida para este sistema es $k = 20.1$, en la Figura 2 se puede apreciar el diagrama de Nyquist correspondiente.

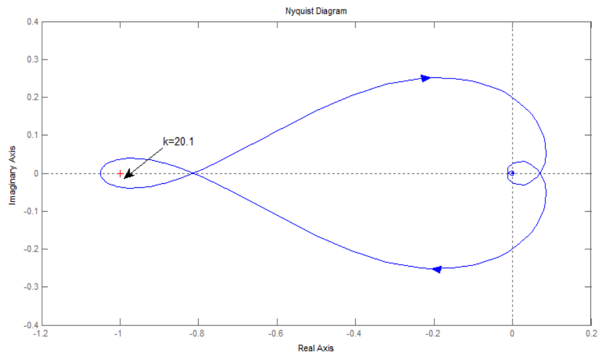

Figura 2. Diagrama de Nyquist

Finalmente en la Figura 3 se puede apreciar el adecuado comportamiento de la señal de salida del sistema de la *ec. (9)*, además el sistema muestra tener cierta robustez y un adecuado comportamiento (como se puede ver en la Figura 4) ante variaciones paramétricas, las cuales en la industria son muy cotidianas ya que diario existe desgaste de los componentes de la planta.

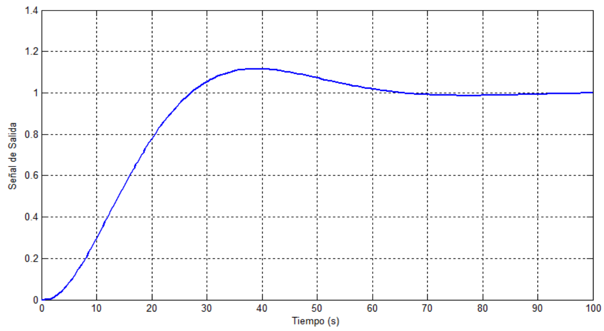

Figura 3. Señal de Salida del Sistema.

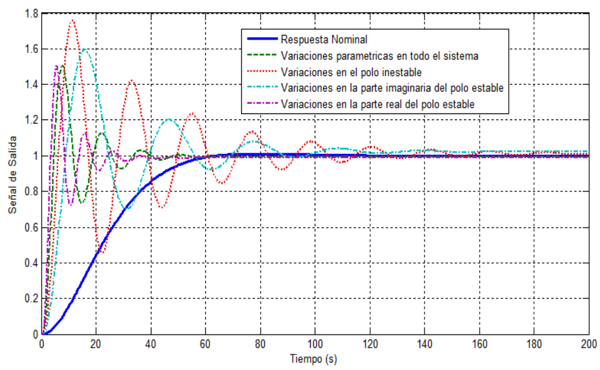

Figura 4. Señales de Salida del Sistema ante variaciones paramétricas.

Nótese que el sistema preserva la estabilidad a pesar de tener algunas fluctuaciones en su respuesta ante variaciones en los parámetros, que es una característica importante para controlar los sistemas físicos, ya que no es posible asegurar que los sistemas son susceptibles a pequeños cambios en su funcionamiento.

Por otro lado, es importante observar que cuando el retardo de tiempo es suficientemente grande (es decir, cerca del límite $\frac{1}{a}-\frac{2\zeta}{\omega_n}$), la región de estabilidad del sistema de lazo cerrado se hace más pequeño (como puede verse en el diagrama de Nyquist de la Figura 5). Pero, a su vez, es también importante observar que cuando se calcula la ganancia para el retardo máximo del sistema, esta ganancia puede soportar todos los retrasos que existen desde 0 hasta el retardo máximo como se ve en la Figura 5. Con el fin de ilustrar este hecho (ver Figura 5 y 6), vamos a considerar una ganancia $k = 20.05$

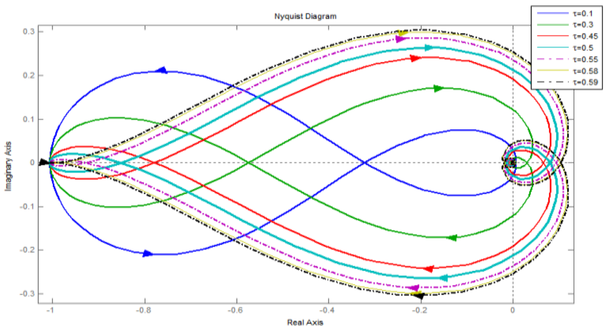

Figura 5. Diagrama de Nyquist para diferentes valores de τ

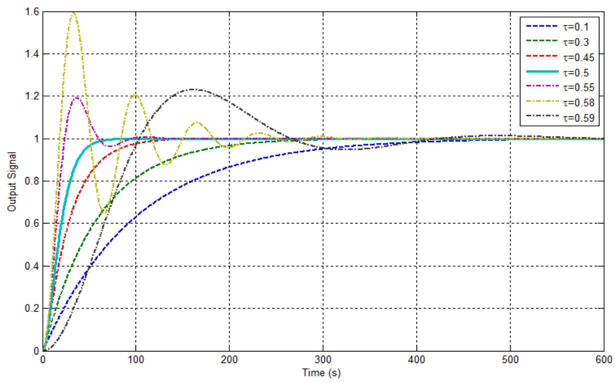

Figura 6. Señal de salida con variaciones en el retardo.

VI. CONCLUSIONES

Los sistemas inestables con retardo de tiempo representan comúnmente un problema de control difícil de abordar. En este trabajo se presentan las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales es posible estabilizar sistemas de tercer orden inestables con posibles polos complejos conjugados y tiempo de retardo mediante una retroalimentación estática de la salida. Adicionalmente, esta estrategia proporciona cierta robustez ya que pese a variaciones en sus parámetros sigue funcionando adecuadamente como se pudo ilustrar en el ejemplo presentado en este trabajo.

REFERENCIAS

Bequette, B.W. (2003). Process Control. Modelling, Design and Simulation. Prentice Hall

Del Muro, B., Gonzálz, O. A., & Pedraza, Y. A. (2009). Stabilization of High Order Systems with Delay using a Predictor Schema. IEEE 52nd International Midwest Symposium on Circuits and Systems, (pp. 337-340). Cancun.

E. Fridman and U. Shaked. (2002). An improved stabilization method for linear time-delay systems, Automatic Control, IEEE Transactions on 47, no. 11, 1931 – 1937.

J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. (2008). Simple robust dead-time compensator for first order plus dead-time unstable processes. Ind. Eng. Chem. Res., 47:4784–4790,

J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. (2009). Unified approach for robust dead-time compensator design. Journal of Process Control, 19:38–47.

Jean-Pierre Richard. (2003). Time-Delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems., Automatica 39, 1667–1694.

Kawnish Kirtania, M.A.A. Shoukat Choudhury. (2012). A novel dead time compensator for stable processes with long dead times, Journal of Process Control, JJPC-1361; No. of Pages 14.

M. Velasco B. Del Muro, J.F. Marquez and J. Alvarez. (2008). Stabilization Strategy for Unstable First Order Linear Systems with Large Time Delay. ICMIC, Shanghai, China.

Márquez, J., Del Muro, B., Velasco, M., & Alvarez, J. (2010). Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay. Revista Mexicana de Ingeniería Química, 9(1), 43-52.

M.S. Mahmoud and A.Y. Al-Rayyah. (2009). Efficient parameterisation to stability and feedback synthesis of linear time-delay systems, Control Theory Applications, IET 3, no. 8, 1107 –1118.

Munz, U., C. Ebenbauer, T. Haag, and F. Allgower, (2009). "Stability analysis of time-delay systems with incommensurate delays using positive polynomials," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 54, No. 5, pp. 1019–1024.

Nesimioglu, B. S. and M. T. Soylemez. (2010). "A simple derivation of all stabilizing proportional controllers for first order time-delay systems," Asian J. Control, Vol. 14, pp. 1–7.

O.J.M. Smith. (1957). Closed control of loops with dead time, Chemical Engineering Progress 53, 217–219.

Qing-Chang Zhong. (2006). Robust Control of Time-Delay Systems, Springer.

Rao, A.S. and Chidambaram, M. (2006). Enhanced two-degrees-of-freedom control strategy for second-order unstable processes with time delay. Industrial and Engineering Chemistry Research 45(10), 3604-3614.

R. A. Seshagiri, V. S. R. Rao, and M. Chidambaram. (2007). Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay processes, Ind. Eng. Chem. Res 46(13), 4561–4571.

Silva, G. J. and S. P. Bhattacharyya. (2005). PID Controllers for Time-Delay Systems, Birkhuser, Boston, MA.

S. I. Niculescu. (2001). Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach. Springer-Verlag, London.

See Chek Lee, Qing-Guo Wang*, Cheng Xiang (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers, Journal of Process Control 20, 235–239

V.B. Kolmanovskii and J.-P. Richard. (1999). Stability of some linear systems with delays, Automatic Control, IEEE Transactions on 44, no. 5, 984 –989.

Walton, K. and J. E. Marshall. (1987). "Direct method for TDS stability analysis," IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 134, pp. 101–107.

W. Michiels, K. Engelborghs, P. Vansevenant, and D. Roose. (2002). Continuous pole placement for delay equations, Automatica 38, no. 5, 747 – 761.

Y. S. Lee, Y. S. Moon, W. H. Kwon, and P. G. Park. (2004). Delay Dependent Robust H1 Control for Uncertain Systems with a State-Delay, Automatica 40, no. 1, 65–72.